1 ソレノイドのつくる磁場に関する補足

今回の授業では，ソレノイドを流れる電流によって生じる磁場が，次を満たすことを（証明せずに）用いた：

- 内部：$H_r = H_\theta = 0$.
- 外部：$H_r = 0$.

記号の意味を復習しておくと，H_z, H_r, H_θ はそれぞれ磁場の軸方向成分，半径方向成分，周回方向成分である．

動画では，導出があまりに煩雑になるのを防ぐために上に述べたことの証明は省略したが，やはり証明が気になるという人もいるであろう．以下で，それらを証明したいと思う．

1.1 ソレノイドの内部および外部で $H_r = 0$ となること

ソレノイドと中心軸を共有する円筒状の閉曲面を考え，そこに磁場の湧き出しなしの法則（§3.5 参照）を適用する．ここで，円筒の半径や高さは任意とする．

円筒の底面積を S_b, 側面積を S_s とする．ソレノイドは，近似的に z 方向に並進対称だから，H_z, H_r は z 方向に一定．また，ソレノイドは近似的に中心軸周りに回転対称でもあるから，H_r は円筒の側面上で常に一定である．

以上から，磁場の湧き出しなしの法則より

$$H_z \cdot S_b + (-H_z \cdot S_b) + H_r \cdot S_s = 0 \tag{1.1}$$

が成り立つ．念の為に各項の意味を説明すると，左辺第一項は円筒上面から出て行く磁力線の本数，第二項は下面から出て行く磁力線の本数（入ってくるものは負号をつけて勘定されることに注意），第三項は側面から出て行く磁力線の本数である [1].

式 (1.1) 左辺第一項と第二項は打ち消し合うから，ただちに

$$H_r \cdot S_s = 0.$$

さらに，側面積 S_s は 0 ではあり得ないから，

$$H_r = 0$$

[1]厳密に言うと，円筒上面における H_z は面内で変化し得るから，左辺第一項は本来

$$\int_{\mathrm{T.S.}} H_z \mathrm{d}S \tag{1.2}$$

と書かれなければならない（積分記号右下の”T.S.”は上面”Top Surface”での積分を表す）．しかし，上面と下面で対応する点ごとに H_z の値が同じであり，従って式 (1.1) における上面からの寄与と下面からの寄与が打ち消し合うという理屈は，このような厳密な書き方においても変わらず成立する．そこで，本文では「厳密な論理の流れを追跡することより，論理の要点を掴むことを優先させる」立場から，数式の簡単化のためにあえて不正確な書き方をした．

が結論される．よって，考えている円筒の側面上では常に $H_r = 0$ が成り立つ．さらに，円筒の半径や高さは任意であったから，結局ソレノイド内外のあらゆる点で $H_r = 0$ が示された．

1.2　ソレノイド内部で $H_\theta = 0$ であること

ソレノイドの内側に，ソレノイドの中心軸上に中心を持ち，軸と垂直な面に含まれる半径 r の円を考える（r は，ソレノイドの半径より小さい範囲で任意とする）．

ソレノイドの近似的な回転対称性より，H_θ は円周上で常に一定値である．また，円の内部を貫く電流は存在しないから，アンペールの法則より

$$H_\theta \cdot 2\pi r = 0.$$

$r \neq 0$ よりただちに

$$H_\theta = 0$$

を得る．

円の中心位置は（ソレノイドの中心軸上で）任意であったし，円の半径 r も（ソレノイドの半径より小さい範囲で）任意であったから，結局ソレノイド内部のあらゆる点で $H_\theta = 0$ が示された．